MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
A. Ribelles, D. Rost

WS 2019/20
Blatt 5
18.11.2019

Tutorium zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“

1. Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{(2+xy)y^2}{x^2+y^4} & , \quad \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   a) Zeigen Sie, daß f in den Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $(x,y) \neq (0,0)$ stetig, im Punkt $(0,0)$ aber unstetig ist.

   b) Bestimmen Sie alle Stellen (x,y), in denen f total differenzierbar ist.

2. Gegeben sei die DLG

$$y' = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y \qquad (\star)$$

   a) Zeichnen Sie für $m \in \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\}$ die Menge S_m aller Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, in denen die Tangente an den Graphen einer Lösung φ von $(\star)$ die Steigung m hat.

   b) Skizzieren Sie das Richtungsfeld obiger DGL sowie den Graphen der Lösung des AWP mit $y(0) = 0.5$.

   c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $(\star)$.

3. Bestimmen Sie die (maximale) Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{3\,y + 2\,x}{x} \qquad \text{für} \quad x > 0 \qquad \text{mit} \quad y(1) = 0.$$

4. Gegeben sei die Funktion

$$a : \left]-1, 1\right[\to \mathbb{R}, \quad a(x) = \frac{1-x}{(1+x)\,(1+x^2)}.$$

   a) Bestätigen Sie, daß für alle $x \in \left]-1,1\right[$

$$a(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{x}{1+x^2}$$

   gilt, und bestimmen Sie damit eine Stammfunktion $A : \left]-1,1\right[\to \mathbb{R}$ von a.

   b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = a(x)\,y \quad \text{mit} \quad y(0) = 1.$$

Für die Tutorien vom 18.11. und 20.11.19